



导学案

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学

必修第一册 SJ

细分课时

分层设计

落实基础

突出重点

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

01 第一章 集合

PART ONE

- 1.1 集合的概念与表示 导 187
 第 1 课时 集合的概念/导 187 第 2 课时 集合的表示/导 188
- 1.2 子集、全集、补集 导 191
- 1.3 交集、并集 导 194
- ④ 本章总结提升 导 197

02 第二章 常用逻辑用语

PART TWO

- 2.1 命题、定理、定义 导 199
- 2.2 充分条件、必要条件、充要条件 导 201
- 2.3 全称量词命题与存在量词命题 导 203
 2.3.1 全称量词命题与存在量词命题 导 203
 2.3.2 全称量词命题与存在量词命题的否定 导 205
- ④ 本章总结提升 导 207

03 第三章 不等式

PART THREE

- 3.1 不等式的基本性质 导 209
- 3.2 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b \geq 0)$ 导 211
 3.2.1 基本不等式的证明 导 211
 3.2.2 基本不等式的应用 导 213
- 3.3 从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式 导 215
 3.3.1 从函数观点看一元二次方程 导 215
 3.3.2 从函数观点看一元二次不等式 导 217
 第 1 课时 三个二次关系、一元二次不等式的解法/导 217 第 2 课时 一元二次不等式的简单应用/导 219
- ④ 本章总结提升 导 221

04 第四章 指数与对数

PART FOUR

- 4.1 指数 导 225
 4.1.1 根式 导 225
 4.1.2 指数幂的拓展 导 226
- 4.2 对数 导 229
 4.2.1 对数的概念 导 229
 4.2.2 对数的运算性质 导 231
 第 1 课时 对数的运算性质/导 231 第 2 课时 换底公式与对数的应用/导 232
- ④ 本章总结提升 导 234

05 第五章 函数概念与性质

PART FIVE

- 5.1 函数的概念和图象 导 237
 - 第 1 课时 函数的概念/导 237
 - 第 2 课时 函数的图象/导 239
- 5.2 函数的表示方法 导 242
- 5.3 函数的单调性 导 245
 - 第 1 课时 单调性的概念与证明/导 245
 - 第 2 课时 函数的最大(小)值/导 247
- 5.4 函数的奇偶性 导 249
 - 第 1 课时 奇偶性的概念/导 249
 - 第 2 课时 奇偶性的应用/导 250
 - 第 3 课时 函数性质的综合问题/导 252
- ④ 本章总结提升 导 253

06 第六章 幂函数、指数函数和对数函数

PART SIX

- 6.1 幂函数 导 256
- 6.2 指数函数 导 258
 - 第 1 课时 指数函数的概念与图象/导 258
 - 第 2 课时 指数函数的性质及应用/导 260
- 6.3 对数函数 导 262
 - 第 1 课时 对数函数的概念与图象/导 262
 - 第 2 课时 对数函数的性质及应用/导 265
- ④ 本章总结提升 导 268

07 第七章 三角函数

PART SEVEN

- 7.1 角与弧度 导 271
 - 7.1.1 任意角 导 271
 - 7.1.2 弧度制 导 274
- 7.2 三角函数概念 导 276
 - 7.2.1 任意角的三角函数 导 276
 - 第 1 课时 任意角的三角函数/导 276
 - 第 2 课时 三角函数线/导 278
 - 7.2.2 同角三角函数关系 导 280
 - 7.2.3 三角函数的诱导公式 导 283
 - 第 1 课时 诱导公式(一)/导 283
 - 第 2 课时 诱导公式(二)/导 284
- 7.3 三角函数的图象和性质 导 286
 - 7.3.1 三角函数的周期性 导 286
 - 7.3.2 三角函数的图象与性质 导 288
 - 第 1 课时 正弦、余弦函数的图象/导 288
 - 第 2 课时 正弦、余弦函数的性质/导 290
 - 第 3 课时 正切函数的图象与性质/导 293
 - 7.3.3 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 导 295
 - 第 1 课时 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象/导 295
 - 第 2 课时 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的性质/导 298
- 7.4 三角函数应用 导 301
- ④ 本章总结提升 导 303

08 第八章 函数应用

PART EIGHT

- 8.1 二分法与求方程近似解 导 309
 - 8.1.1 函数的零点 导 309
 - 8.1.2 用二分法求方程的近似解 导 310
- 8.2 函数与数学模型 导 312
 - 8.2.1 几个函数模型的比较 导 312
 - 8.2.2 函数的实际应用 导 315
- ④ 本章总结提升 导 319
- 专题 数学建模与数学探究 导 322

◆ 参考答案

导 325

1.1 集合的概念与表示

第1课时 集合的概念

【学习目标】

1. 能结合具体实例认识和识别,知道什么是集合,对于给出的一些例子,会判断哪些事物可以组成集合,哪些不能组成集合.
2. 能在具体的情境中判断元素与集合的关系.

课前提习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 集合的定义及元素

1. 集合与元素的概念:一般地,一定范围内某些 _____ 对象的全体组成一个集合. 集合中的每一个 _____ 称为该集合的元素,简称 _____.

2. 常用数集及表示符号

名称	非负整数集 (或自然数集)	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记法	_____	_____	_____	_____	_____

3. 元素与集合的关系

关系	概念	记法	读法
属于	如果 _____, 那么就说 a 属于集合 A	_____	a 属于 A
不属于	如果 _____, 那么就说 a 不属于集合 A	_____ 或 _____	a 不属于 A

4. 集合中元素的三个特性为 _____、_____、_____.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 平面上到点 O 的距离等于 1 的点的全体可以组成一个集合. ()
- (2) 苏教版必修第一册课本上所有的难题能够组成一个集合. ()

2. 某中学高一年级 10 个班组成一个集合 A .

- (1) 高一(2)班、高二(8)班是集合 A 中的元素吗?
- (2) 若 $a \in A, b \in A$, 则元素 a, b 有什么关系? 为什么?

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 集合的概念

例 1 (多选题)[2024·天津南开区高一期中] 下列给出的对象可以组成一个集合的有 ()

- 某校 2024 年入学的全体高一年级新生
- $\sqrt{2}$ 的所有近似值
- 某个班级中学习成绩较好的所有学生
- 不等式 $3x - 10 < 0$ 的所有正整数解

变式 (多选题) 下列说法中正确的是 ()

- 所有接近于 0 的数可以组成一个集合
- 所有正方体可以组成一个集合
- 未来世界的未来所有高科技产品可以组成一个集合
- 不大于 3 的所有自然数可以组成一个集合

[素养小结]

判断一组对象能组成集合的条件是能找到一个明确的标准,使得对于任何一个对象,都能确定它是不是给定集合的元素.

◆ 探究点二 元素与集合的关系

例 2 (1) 设不等式 $3-2x < 0$ 的解组成的集合为 M , 下列正确的是 ()

- A. $0 \in M, 2 \in M$ B. $0 \notin M, 2 \in M$
C. $0 \in M, 2 \notin M$ D. $0 \notin M, 2 \notin M$

(2) 已知集合 A 是由形如 $m + \sqrt{3}n$ (其中 $m, n \in \mathbf{Z}$) 的数组成的, 则下列属于集合 A 的数是_____. (填序号)

- ① $2 - \sqrt{3}$; ② 5 ; ③ $\frac{1}{\sqrt{3}+4}$; ④ $\frac{\sqrt{3}\pi}{2} + 1$.

变式 (1) 用符号“ \in ”或“ \notin ”填空: 若 A 表示第二、四象限的角平分线上的点的集合, 则点 $(0, 0)$ _____ A , $(1, 1)$ _____ A , $(-3, 3)$ _____ A .

(2) 由所有能被 3 整除的数组成的集合为 M , 则下列数中一定是集合 M 的元素的是_____. (填序号)

- ① 能被 2 整除的数; ② 能被 6 整除的数; ③ 能被 -3 整除的数; ④ 能被 5 整除的数.

[素养小结]

判断一个元素是不是某个集合中的元素, 关键是判断这个元素是否具有这个集合的元素的共同特性.

拓展 设集合 M 满足: ① $2 \notin M$; ② 若 $x \in M$, 则 $\frac{2}{2-x} \in M$. 已知 $3 \in M$, 则 M 中必含有的元素是_____.

◆ 探究点三 集合中元素的特性

例 3 (1) [2024 · 石家庄一中高一月考] 由 $a^2, 2-a, 4$ 组成一个集合 A , 且 A 中含有 3 个元素, 则实数 a 的取值可以是 ()

- A. 1 B. -2
C. -1 D. 2

(2) 已知集合 A 中含有两个元素 1 和 a^2 , 若 $a \in A$, 求实数 a 的值.

变式 (1) 若以集合 A 的四个元素 a, b, c, d 为边长构成一个四边形, 则这个四边形可能是 ()

- A. 梯形 B. 平行四边形
C. 菱形 D. 矩形

(2) 设 A 表示由 $a^2 + 2a - 3, 2, 3$ 组成的集合, B 表示由 $2, |a+3|$ 组成的集合, 若 $5 \in A$ 且 $5 \notin B$, 则 a 的值为_____.

[素养小结]

(1) 对于求集合中字母参数的问题, 常根据集合中元素的确定性得出字母的所有可能取值, 再利用集合中元素的互异性进行检验.

(2) 在利用集合中元素的特性解题时常用分类讨论思想, 注意分类的标准要明确.

第 2 课时 集合的表示

【学习目标】

- 能够在简单的现实情境或数学情境中, 抽象概括出数学对象的一般特征, 并用集合语言予以表达.
- 对于给定的具体情境, 会用三种语言(自然语言、图形语言、符号语言)表达所要研究的数学对象, 并能进行转换.
- 在具体情境中, 了解空集的含义.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 集合的表示法

1. 列举法: 将集合的元素一一列举出来, 并置于_____内, 这种表示集合的方法叫作列举法(注意元素间要用“,”隔开, 如 $\{-1, 0, 1, 2\}$).

2. 描述法: 将集合的所有元素都具有的_____ (满足的条件) 表示出来, 写成_____的形式, 这种表示集合的方法叫作描述法.

3. Venn 图: 为了直观地表示集合, 我们常画一条_____的曲线, 用它的_____来表示一个集合, 称为 Venn 图.

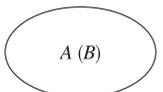
【诊断分析】 1. 选择适当的方法表示下列集合:

- (1) 方程 $(x-1)(x+2)=0$ 的实数根组成的集合;
 (2) 由直线 $y=2x+4$ 上的横坐标和纵坐标都是自然数的点组成的集合.

2. 讨论下列说法是否正确.

- (1) 集合 $\{x \in \mathbf{R} | -1 < x < 2\}$ 与集合 $\{y \in \mathbf{R} | -1 < y < 2\}$ 表示同一个集合;
 (2) 集合 $\{y | y = x - 1\}$ 与集合 $\{(x, y) | y = x - 1\}$ 表示同一个集合.

◆ 知识点二 集合相等

定义	如果两个集合所含的元素 _____ (即 A 中的元素 _____ B 的元素, B 中的元素也 _____ A 的元素), 那么称这两个集合相等
记法	记作 _____
图示	

【诊断分析】 (1) $A = \{a, b, c\}, B = \{a, b, c\}$, 这两个集合的关系是 _____.

(2) 集合 $\{x | |x-1| \leq 1\}$ 与集合 $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 相等吗?

◆ 知识点三 集合的分类

有限集	含有 _____ 个元素的集合
无限集	含有 _____ 个元素的集合
空集	不含任何元素的集合称为 _____, 记作 _____

【诊断分析】 给出下列集合, 则 _____ 是有限集, _____ 是无限集. (填序号)

- (1) $\{x | 1 < x < 5\}$; (2) $\{x \in \mathbf{Z} | 1 < x < 5\}$; (3) 某校高一(1)班全体同学组成的集合; (4) $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + x - 1 = 0\}$.

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 列举法表示集合

例 1 用列举法表示下列集合.

- (1) 不大于 10 的非负偶数组成的集合;
 (2) 方程 $x^2 = x$ 的所有实数解组成的集合;
 (3) 直线 $y = 2x + 1$ 与 y 轴的交点所组成的集合;
 (4) 方程组 $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = -1 \end{cases}$ 的解组成的集合.

变式 用列举法表示下列集合.

- (1) 中国的直辖市组成的集合;
 (2) 15 的正约数组成的集合;
 (3) 满足 $-2 \leq x \leq 3$ 且 $x \in \mathbf{Z}$ 的数组成的集合.

[素养小结]

用列举法表示集合的步骤:

- (1) 求出集合的元素;
- (2) 把元素一一列举出来,元素之间用逗号分隔,相同元素只能列举一次;
- (3) 用花括号括起来.

◆ 探究点二 描述法表示集合

例 2 用描述法表示下列集合:

- (1) 正偶数集;
- (2) 被 3 除余 2 的正整数组成的集合;
- (3) 平面直角坐标系中坐标轴上的点组成的集合.

变式 (1) 集合 $A = \{1, -3, 5, -7, 9, \dots\}$ 用描述法可表示为 ()

- $\{x | x = 2^n \pm 1, n \in \mathbf{N}\}$
- $\{x | x = (-1)^n (2n-1), n \in \mathbf{N}\}$
- $\{x | x = (-1)^n (2n+1), n \in \mathbf{N}\}$
- $\{x | x = (-1)^{n-1} (2n+1), n \in \mathbf{N}\}$

(2) 设集合 $B = \left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{6}{2+x} \in \mathbf{N}\right\}$.

- ① 试判断 1, 2 与集合 B 的关系;
- ② 用列举法表示集合 B.

[素养小结]

用描述法表示集合应注意以下三点:

- (1) 写清楚该集合代表元素的符号. 例如, 集合 $\{x \in \mathbf{R} | x < 2\}$ 不能写成 $\{x < 2\}$.
- (2) 所有描述的内容都要写在花括号内.
- (3) 在通常情况下, 集合中竖线左侧元素的所属范围为实数集时可以省略不写.

拓展 用适当的方法表示下列集合.

- (1) 方程 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$ 的解集;
- (2) $\{y | y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$;
- (3) 平面直角坐标系中所有第二、四象限内的点;
- (4) 不等式 $2x + 3 > 7$ 的解集.

◆ 探究点三 集合与集合之间的相等关系

例 3 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\left\{2, 2a-b, \frac{2a}{b}\right\} = \left\{0, a+b, \frac{b}{a}\right\}$, 则 ab 等于 ()

- $-\frac{1}{9}$
- $\frac{1}{9}$
- $-\frac{2}{9}$
- $\frac{2}{9}$

变式 设集合 $A = \{x, y\}$, $B = \{0, x^2\}$, 若 $A = B$, 则实数 $x + y =$ _____.

[素养小结]

- (1) 若两集合相等, 则集合中的元素完全相同.
- (2) 解含参数的集合问题时, 要检验集合中元素的互异性.

拓展 设集合 $A = \{x | -2 < x \leq m - 3n\}$, $B = \{x | 3m + n < x \leq 2\}$. 若 $A = B$, 则实数 $m =$ _____, $n =$ _____.

1.2 子集、全集、补集

【学习目标】

1. 能结合具体实例解释集合之间包含与相等的意义,并能识别给定集合的子集.
2. 在具体情境中,了解全集的含义.
3. 理解给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
4. 对于给定的问题和情境,能使用 Venn 图表达集合间的基本关系,从中体会图形对理解抽象概念的作用.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

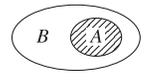
◆ 知识点一 子集

定义	如果集合 A 的 _____ 元素都是集合 B 的元素(若 $a \in A$, 则 $a \in B$), 那么集合 A 称为集合 B 的子集
记法与读法	记作 _____ 或 _____, 读作“集合 A 包含于集合 B ”或“集合 B 包含集合 A ”
图示	
结论	(1) 任何一个集合是它本身的子集, 即 $A \subseteq A$. (2) 对于集合 A, B, C , 若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$. (3) _____ 是任何集合的子集

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) $0 \subseteq \{x | x < 5, x \in \mathbf{R}\}$. ()
- (2) 设 A 是一个集合, 则 $A \subseteq A$. ()
- (3) $\{0, 1\} \subseteq \{-1, 0, 1\}$. ()

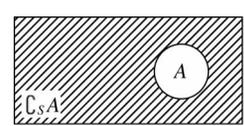
◆ 知识点二 真子集

定义	如果 $A \subseteq B$, 并且 _____, 那么集合 A 称为集合 B 的真子集
记法与读法	记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$, 读作“ A 真包含于 B ”或“ B 真包含 A ”
图示	
结论	$A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$, 则 $A \subsetneq C$

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 设 A 是一个集合, 则 $A \subsetneq A$. ()
- (2) 若集合 A 中有 3 个元素, 则集合 A 共有 7 个真子集. ()

◆ 知识点三 补集的概念及性质

定义	文字语言	设 $A \subseteq S$, 由 S 中 _____ 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集, 记作 _____ (读作“ A 在 S 中的补集”)
	符号语言	$\complement_S A = \{x \underline{\hspace{2cm}}\}$
	图形语言	
性质	(1) $\complement_S A \subseteq S$; (2) $\complement_S S = \underline{\hspace{2cm}}$, $\complement_S \emptyset = \underline{\hspace{2cm}}$; (3) $\complement_S (\complement_S A) = \underline{\hspace{2cm}}$; (4) $A \cup (\complement_S A) = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \cap (\complement_S A) = \underline{\hspace{2cm}}$	

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 一个集合的补集一定含有元素. ()
- (2) 集合 $\complement_{\mathbf{Z}} \mathbf{N}$ 与集合 $\complement_{\mathbf{Z}} \mathbf{N}^*$ 相等. ()
- (3) 集合 $\complement_A C$ 与集合 $\complement_B C$ 相等. ()

◆ 知识点四 全集

(1) 定义: 如果一个集合包含我们所研究问题中涉及的 _____, 那么就称这个集合为全集.

(2) 记法: 全集通常记作 _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 只有实数集 \mathbf{R} 才可以作为全集. ()
- (2) 全集一定包括任何一个元素. ()
- (3) 为了研究集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ 之间的关系, 要从中选一个集合作为全集, 这个集合是 A . ()

◆ 探究点一 集合与集合之间的包含关系

例 1 指出下列各组集合之间的关系:

(1) $A = \{-1, 1\}$, $B = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$;

(2) $C = \{x | x \text{ 是等边三角形}\}$, $D = \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}$;

(3) $M = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*\}$, $N = \{x | x = 2n + 1, n \in \mathbf{N}^*\}$.

变式 (1) 下列各式中, 正确的个数是 ()

① $\{0\} \in \{0, 1, 2\}$; ② $\{0, 1, 2\} \subseteq \{2, 1, 0\}$; ③ $\emptyset \subseteq \{0, 1, 2\}$; ④ $\emptyset = \{0\}$; ⑤ $\{0, 1\} = \{(0, 1)\}$; ⑥ $0 = \{0\}$.

A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

(2) 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 3\}$, $B = \{x | x \leq 5\}$, 则 ()

A. $A \in B$ B. $A \subsetneq B$
C. $B \subsetneq A$ D. $B \subseteq A$

[素养小结]

判断集合间关系的方法

首先, 判断一个集合 A 中的任意元素是否属于另一集合 B , 若是, 则 $A \subseteq B$, 否则 A 不是 B 的子集; 其次, 判断另一个集合 B 中的任意元素是否属于第一个集合 A , 若是, 则 $B \subseteq A$, 否则 B 不是 A 的子集; 若既有 $A \subseteq B$, 又有 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

◆ 探究点二 集合的子集与真子集

例 2 (1) 集合 $M = \{1, 2, 3\}$ 的真子集个数是 ()

A. 6 B. 7
C. 8 D. 9

(2) 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集和真子集, 并写出子集和真子集的个数. 试猜想含 n 个元素的集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的所有子集的个数是多少? 真子集的个数及非空真子集的个数呢?

变式 (1) [2024 · 福建泉州一中高一月考] 集合

$A = \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} y = x, \\ y = x^2 \end{cases} \right\}$, 则集合 A 的真子集个数为 _____.

(2) 已知集合 M 满足 $\{1, 2\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 写出所有满足条件的集合 M .

[素养小结]

求集合的子集问题的一般方法:求给定集合的子集(真子集)时,一般按照子集所含元素的个数分类,再依次写出符合要求的子集(真子集).在写子集时,注意不要忘记空集和集合本身.

◆ 探究点三 补集的简单运算

例 3 (1)若全集 $M = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 3\}$, 集合 $N = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 4\}$, 则 $\complement_M N =$ ()

- A. \emptyset
B. $\{-3, 0, 1, 3\}$
C. $\{x \mid -3 \leq x \leq 3 \text{ 且 } x \neq \pm 2\}$
D. $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$

(2)已知全集 $A = \{x \mid 1 < x \leq 24\}$, 集合 $B = \{x \mid 1 < x < 5\}$, 则 $\complement_A B =$ ()

- A. $\{x \mid x \geq 5\}$
B. $\{x \mid 5 < x \leq 24\}$
C. $\{x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$
D. $\{x \mid 5 \leq x \leq 24\}$

变式 (1)设 $U = \{x \mid x < 9, x \in \mathbf{N}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则 $\complement_U A =$ _____, $\complement_U B =$ _____.

(2)[2024·上海嘉定区高一期中] 设全集 $U = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$, 集合 $M = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, 则 $\complement_U M =$ _____.

[素养小结]

求给定集合 A 的补集通常利用补集的定义去求,从全集 U 中去掉属于集合 A 的元素后,由所有剩下的元素组成的集合即为 A 的补集;如果全集及其子集是用不等式表示的,常借助于数轴求解.

◆ 探究点四 集合间关系的应用

例 4 (1)已知集合 $A = \{-1, 2, 4\}$, $B = \{2, m^2\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 m 的取值组成的集合为 _____.

(2)已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$.

- ①求 $\complement_U A$;
②若集合 $B = \{x \mid 2x - a > 0\}$, 且 $B \subseteq \complement_U A$, 求实数 a 的取值范围.

变式 (1)[2024·福建厦门双十中学高一月考]

设 $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x \mid ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值组成的集合 $C =$ _____.

(2)已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid a + 1 \leq x \leq 2a - 1\}$, 且 $A \subseteq (\complement_U B)$, 求实数 a 的取值范围.

[素养小结]

由集合间的关系求参数问题的注意点及常用方法:

(1)注意点:①不能忽视集合为 \emptyset 的情形;②当集合中含有字母参数时,一般需要分类讨论.

(2)常用方法:对于用不等式给出的集合,已知集合的包含关系求相关参数的范围(值)时,常采用数形结合的思想,借助数轴解答.

1.3 交集、并集

【学习目标】

1. 能结合简单的问题情境解释并集与交集的意义.
2. 能求出两个集合的并集与交集.
3. 体会用区间表示集合.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 集合的交集

1. 交集的三种语言表示:

文字语言	由所有_____的元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作_____ (读作“ A 交 B ”)
符号语言	$A \cap B = \{x \underline{\hspace{2cm}}\}$
图形语言	

2. 交集的性质

- (1) $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) $A \cap B \underline{\hspace{1cm}} A, A \cap B \underline{\hspace{1cm}} B$.

【诊断分析】 1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$. 集合 A 与集合 B 有公共元素吗? 集合 A 与集合 B 的公共元素组成的集合是什么?

2. 集合 $A = \{x | y = \sqrt{x} + 2\}, B = \{y | y = \sqrt{x} + 2\}$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

◆ 知识点二 集合的并集

1. 并集的三种语言表示:

文字语言	由所有_____的元素构成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作_____ (读作“ A 并 B ”)
符号语言	$A \cup B = \{x \underline{\hspace{2cm}}\}$
图形语言	

2. 并集的性质

- (1) $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) $A \underline{\hspace{1cm}} A \cup B, B \underline{\hspace{1cm}} A \cup B$.

【诊断分析】 1. 判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 集合 $A \cup B$ 的元素个数小于或等于集合 A 与集合 B 的元素个数和. ()
- (2) $A \cup \emptyset = A$. ()
- (3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. ()
- (4) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = B$. ()

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}, B = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 4\}$, 若将集合 A 与集合 B 的元素放在一起, 组成的一个新集合是什么?

3. 若集合 A 有 5 个元素, 集合 B 有 4 个元素, 集合 $A \cup B$ 有 6 个元素, 则集合 $A \cap B$ 有几个元素?

◆ 知识点三 集合的区间表示

为了叙述方便, 在以后的学习中, 我们常常会用到“区间”的概念, 用区间表示集合, 如下表 (其中 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$):

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x a \leq x \leq b\}$	_____	_____	
$\{x a < x < b\}$	_____	_____	
$\{x a \leq x < b\}$	_____	_____	
$\{x a < x \leq b\}$	左开右闭区间	$(a, b]$	

(续表)

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x x \geq a\}$		$[a, +\infty)$	
$\{x x \leq b\}$		$(-\infty, b]$	
$\{x x < b\}$		$(-\infty, b)$	
R			

【诊断分析】 1. 若 $(2x-3, 4-3x)$ 表示区间, 求 x 的取值范围.

2. 集合 $A = (-5, 3], B = [-2, 6)$, 求 $A \cap B, A \cup B$.

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 交集及其运算

例 1 (1) 若集合 $A = \{x | -5 < x < 2\}, B = \{x | -3 < x < 3\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{x | -3 < x < 2\}$ B. $\{x | -5 < x < 2\}$
C. $\{x | -3 < x < 3\}$ D. $\{x | -5 < x < 3\}$

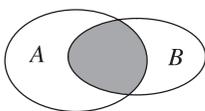
(2) 设集合 $A = \{-2, 2\}, B = \{x | x^2 - 5x - m = 0\}$. 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $B =$ ()

- A. $\{-2, 3\}$ B. $\{2\}$
C. $\{-2, 2\}$ D. $\{2, 3\}$

变式 (1) 设集合 $A = [-1, 2], B = [0, 4]$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $[0, 2]$ B. $[1, 2]$
C. $[0, 4]$ D. $[1, 4]$

(2) 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 10\}, B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 + x - 6 = 0\}$,



则图中阴影部分表示的集合为

- ()
A. $\{2\}$ B. $\{3\}$
C. $\{-3, 2\}$ D. $\{-2, 3\}$

(3) 已知集合 $M = \{1, 2, a^2 - 3a - 1\}, N = \{-1, a, 3\}, M \cap N = \{3\}$, 求实数 a 的值.

[素养小结]

(1) 求两个集合的交集就是求两个集合的所有公共元素组成的集合.

(2) 利用集合的并、交运算求参数的值时, 要注意集合中元素的互异性.

◆ 探究点二 并集及其运算

例 2 (1) 若集合 $A = \{x | x > -1\}, B = \{x | -2 < x < 2\}$, 则 $A \cup B$ 等于 ()

- A. $\{x | x > -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$
C. $\{x | -2 < x < -1\}$ D. $\{x | -1 < x < 2\}$

(2) (多选题) [2024 · 江苏扬州高一期中] 已知集合 $M = \{-1, 1\}, N = \{x | mx = 1\}$, 且 $M \cup N = M$, 则实数 m 的值可以为 ()

- A. -2 B. -1
C. 0 D. 1

变式 (1) 若 $A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{y | y = 2x, x \in A\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{0, 2, 4, 6\}$ B. $\{0, 2\}$
C. $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 0, 2, 4, 6\}$

(2) 满足条件 $M \cup \{2\} = \{1, 2, 4\}$ 的集合 M 的个数是 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

[素养小结]

求集合并集的方法

(1) 若集合中元素个数有限, 则直接根据并集的定义求解, 但要注意集合中元素的互异性.

(2) 若集合中元素个数无限, 可借助数轴, 利用数轴分析法求解, 但要注意是否去掉端点值.

◆ 探究点三 交集、并集的性质

例 3 已知集合 $A = \{x | -3 < x \leq 4\}$, 集合 $B = \{x | k+1 \leq x \leq 2k-1\}$, 且 $A \cup B = A$, 求 k 的取值范围.

变式 (1) [2024 · 江苏扬州五校高一联考] 设 a 为实数, $A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x \leq a\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是_____.

(2) 已知集合 $A = \{x | 3a \leq x \leq 2a+1\}$, $B = \{x | -1 \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

[素养小结]

(1) 在利用交集、并集的性质解题时, 常常会遇到 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ 这类问题, 解答时常借助于交、并集的定义以及集合间的关系去分析, 如由 $A \cap B = A$ 得 $A \subseteq B$, 由 $A \cup B = B$ 得 $A \subseteq B$ 等.

(2) 当集合 $B \subseteq A$ 时, 如果集合 A 是一个确定的集合, 而集合 B 不确定, 运算时要考虑 $B = \emptyset$ 的情况, 切不可漏掉.

拓展 某学校举办运动会, 比赛项目包括田径、游泳、球类, 经统计高一年级有 57 人参加田径比赛, 有 11 人参加游泳比赛, 有 62 人参加球类比赛. 参加球类比赛的同学中有 14 人参加田径比赛, 有 4 人参加游泳比赛; 同时参加田径比赛和游泳比赛的有 8 人; 同时参加三项比赛的有 2 人. 则高一年级参加比赛的同学有 ()

- A. 98 人 B. 106 人
C. 104 人 D. 110 人

◆ 探究点四 交集、并集、补集的综合运算

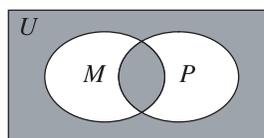
例 4 (1) (多选题) [2024 · 湖北宜都一中高一期中] 已知集合 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | 3 - 2x > 0\}$, 则 ()

- A. $A \cap B = \{x | x < \frac{3}{2}\}$
B. $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | \frac{3}{2} \leq x < 2\}$
C. $A \cup B = \{x | x < \frac{3}{2}\}$
D. $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \mathbf{R}$

(2) [2024 · 长沙高一期中] 已知集合 $U = \{x | 1 < x \leq 7\}$, $A = \{x | 2 \leq x < 5\}$, $B = \{x | 3 \leq x < 7\}$.

求: ① $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$; ② $\complement_U (A \cap B)$.

变式 (1) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{1, 3, 6\}$, $P = \{3, 4, 5\}$, 则如图所示的 Venn 图中阴影部分表示的集合是_____.



(3)(多选题)[2024·山西吕梁高一期中] 下列表述正确的有 ()

- A. $-1 \notin \mathbf{Z}$ B. $\pi \in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$
 C. $\{x \mid |x| < 0\} \subseteq \{0\}$ D. $\mathbf{N}^* \subsetneq \mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z}$

例 2 (1) 已知集合 $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$, $B = \{x \mid 2a < x \leq a + 1, a < 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的取值范围为_____.

(2) 已知集合 $A = \{x \mid 0 < x \leq 4\}$, $B = \{x \mid x < a\}$, 当 $A \subseteq B$ 时, 实数 a 的取值范围为 $a > c$, 则 $c =$ _____.

变式 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 5x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0\}$. 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

◆ 题型二 集合的基本运算

[类型总述] (1) 集合的并集、交集运算; (2) 集合的补集运算; (3) 由集合运算求参数.

例 3 (1) 设集合 $A = \{1, 3, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 6\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 7\}$, 则 $(A \cap C) \cup B =$ ()

- A. $\{1, 3, 6, 7\}$
 B. $\{1, 2, 3, 6, 7\}$
 C. $\{1, 2, 3, 6\}$
 D. $\{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 7\}$

(2) 设集合 $A = \{-1, 0, 2, 5\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3x + m = 0\}$. 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $B =$ ()

- A. $\{-2, 2\}$ B. $\{1, 2\}$
 C. $\{2, 3\}$ D. $\{2, 4\}$

变式 (1) 设集合 $A = \{x \mid -1 < x < 4\}$, $B = \{x \mid x \leq 3\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}}B) \cap A =$ ()

- A. $\{x \mid 3 \leq x < 4\}$ B. $\{x \mid 3 < x < 4\}$
 C. $\{x \mid -1 < x \leq 3\}$ D. $\{x \mid x > -1\}$

(2)[2024·重庆七校高一期中] 已知集合 $M = \{x \mid y = \sqrt{m-x}\}$, $N = \{y \mid y = x^2 - 6x, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 则实数 m 的取值范围是_____.

例 4 [2024·长沙高一期中] 已知集合 $A = \{x \mid |2x-1| \leq 7\}$, $B = \{x \mid 2k-2 < x < k+3\}$.

(1) 当 $k=2$ 时, 求 $A \cup B$;

(2) 若 $A \cup B = A$, 求 k 的取值范围.

变式 已知集合 $A = (-3, 6]$, $B = (b-3, b+7)$, $M = [-4, 5)$, 全集 $U = \mathbf{R}$.

(1) 求 $A \cap M$;

(2) 若 $B \cup (\complement_U M) = \mathbf{R}$, 求实数 b 的取值范围.